數學與程式

索引

數學與程式 1
1 前言 3
1.1 本書適用對象 3
1.2 本書特點 3
2 邏輯思維 4
2.1 邏輯的起源 4
2.2 甚麼是邏輯 4
2.3 邏輯的簡單解釋 5
2.4 數學的思考邏輯 5
2.5 程式的思考邏輯 6
3 簡化運算、提升效率 9
3.1 數列與級數 9
3.2 簡化的方程式 10
4 實用的數學方法 11
4.1 常見使用於程式中的數學 11

1 前言

1.1 本書適用對象

針對從未接觸過程式的入門者，以 1 個小時學習時間為目標設計的教學課程。

本書說明數學與程式的關係，並且介紹數學在程式中應用的各種狀況，讓學員了解數學在撰寫程式時的重要性，使學員在接觸數學相關學科時能夠具有應用數學的思考能力。

1.2 本書特點

1.2.1 介紹在數學與程式中的邏輯思考。

1.2.2 介紹數學在程式中的重要性。

1.2.3 介紹數學在程式中的常見應用。

1.2.4 使用大量圖形解說，容易理解。

2 邏輯思維

2.1 邏輯的起源

邏輯是個很抽象的名詞，這個詞彙最早源自於希臘，古希臘已經發展出訓練邏輯的方法，主要就是幾何原本，我們將古希臘的研究者稱為哲學家，因為在那時所有的科學都是哲學家們進行發展，包括了社會學、心理學、數學等等，在後續的發展中才逐漸演變出各式各樣的專門科學，所以我們一般也都將古希臘哲學稱為科學之母。

邏輯（英語：logic）的字根源起於希臘語邏各斯（希臘語：λόγος），最初的意思有詞語、思想、概念、推理、論點之意。後譯為（法語：logique），最後發展為英文中的邏輯（英語：logic）。

2.2 甚麼是邏輯

以維基百科中的解釋，邏輯被說明如下:

邏輯（古希臘語：λογική；德語：Logik；法語：logique；英語：logic；義大利語、西班牙語、葡萄牙語: logica），又稱理則、論理、推理、推論，是對有效推論的哲學研究[1]。邏輯被使用在大部份的智能活動中，但主要在心理、學習、哲學、語義學、數學、推論統計學、腦科學、法律和電腦科學等領域內被視為一門學科。邏輯討論邏輯論證會呈現的一般形式，哪種形式是有效的，以及其中的謬論。

邏輯通常可分為三個部份：歸納推理、溯因推理和演繹推理。

在哲學裡，邏輯被應用在大多數的主要領域之中：形上學/宇宙論、本體論、知識論及倫理學。

在數學裡，邏輯是指形式邏輯和數理邏輯，形式邏輯是研究某個形式語言的有效推論[2]。主要是演繹推理。 在辯證法中也會學習到邏輯[3]。數理邏輯是研究抽象邏輯關係和數學基本的問題。

在心理、腦科學、語義學、法律裡，是研究人類思想推理的處理。

在學習、推論統計學裡，是研究最大可能的結論。主要是歸納推理、溯因推理。

在電腦科學裡， 是研究各種方法的性質，可能性，和實現在機器上。主要是歸納推理、溯因推理，也有在歸納推理的研究。

從古文明開始（如古印度[註 1]、古中國[註 2]和古希臘）都有對邏輯進行研究。在西方，亞里斯多德將邏輯建立成一門正式的學科，並在哲學中給予它一個基本的位置。

2.3 邏輯的簡單解釋

到了這裡，邏輯這個詞彙仍然是充滿抽象的，我們可以試圖以更簡單的概念來說明，邏輯是甚麼:

2.3.1 邏輯是一步一腳印的思考。

2.3.2 邏輯是一個蘿蔔一個坑的思考。

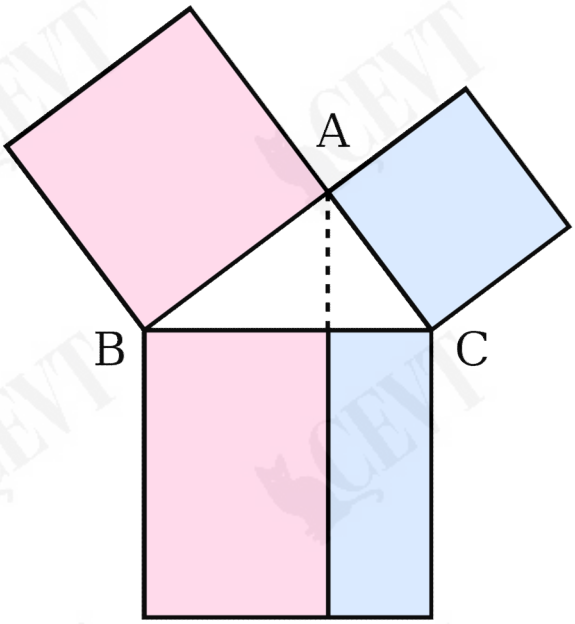
2.3.3 邏輯是因為……所以……的思考。

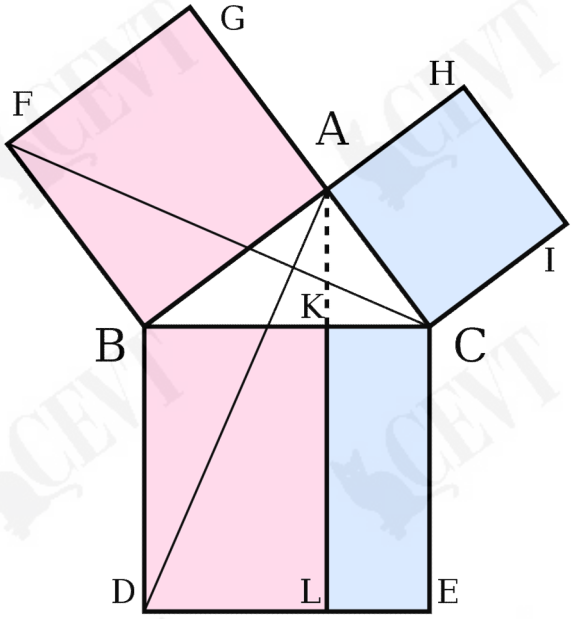
在邏輯的思考中，都一定有一個確定的理由，才會產生後續的結果，也就是我們一般所說的科學精神，在科學中所有的學科都講究這樣的邏輯概念，我們才能得到不變的真理，數學也自然必須符合這樣的邏輯精神。

2.4 數學的思考邏輯

我們將幾何學稱為數學之母，因為最早的數學是由幾何發展而來的，在幾何學中已經發展出了邏輯性的思考與驗證的方法，也經常被用來訓練邏輯思考。

下面是幾何學中的畢氏定理(勾股定理)證明，畢氏定理目前有超過 400 種的證明方法，我們列舉了古希臘哲學家歐幾里得在幾何原本一書中證明的方法:





1. 設$\triangle ABC$為一直角三角形，其直角為$\angle CAB$。
2. 其邊為$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、和$\overline{CA}$，依序繪成四方形$CBDE$、$BAGF$和$ACIH$。
3. 畫出過點A之$\overline{BD}$、$\overline{CE}$的平行線。此線將分別與$\overline{BC}$和$\overline{DE}$直角相交於K、L。
4. 分別連接$\overline{CF}$、$\overline{AD}$，形成兩個三角形BCF、BDA。
5. $\angle CAB$和$\angle BAG$都是直角，因此C、A和G都是共線的，同理可證B、A和H共線。
6. $\angle CBD$和$\angle FBA$皆為直角，所以$\angle ABD$相等於$\angle FBC$。
7. 因為$\overline{AB}$和$\overline{BD}$分別等於$\overline{FB}$和$\overline{BC}$，所以$\triangle ABD$必須全等於$\triangle FBC$。
8. 因為A與K和L在同一直線上，所以四方形$BDLK$必須二倍面積於$\triangle ABD$。
9. 因為C、A和G在同一直線上，所以正方形$BAGF$必須二倍面積於$\triangle FBC$。
10. 因此四邊形$BDLK$必須和$BAGF$有相同的面積$=\overline{AB}^2$。
11. 同理可證，四邊形$CKLE$必須有相同的面積$ACIH = \overline{AC}^2$。
12. 把這兩個結果相加，$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BD} \times \overline{BK} + \overline{KL} \times \overline{KC}$
13. 由於$\overline{BD} = \overline{KL}$，$\overline{BD} \times \overline{BK} + \overline{KL} \times \overline{KC} = \overline{BD}\left(\overline{BK} + \overline{KC}\right) = \overline{BD} \times \overline{BC}$
14. 由於$CBDE$是個正方形，因此$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$。

在這個證明中，我們可以看到每一個步驟，都是因為.... 所以.... 的論述方式，也就是一步一腳印地證明，完全以邏輯的思考方式來進行。

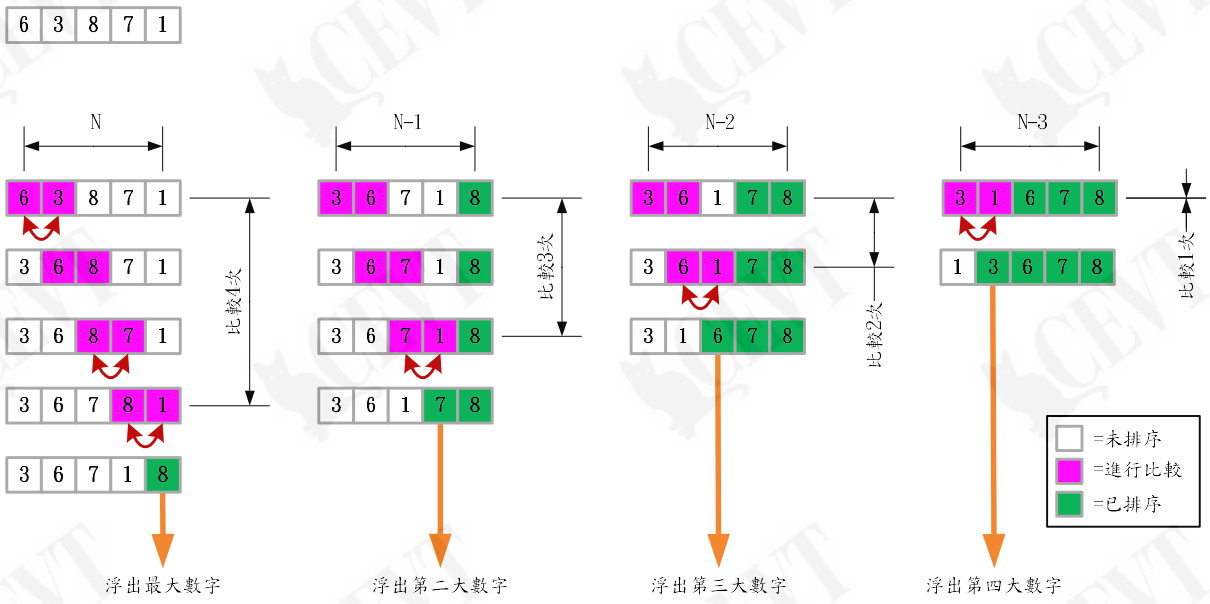
2.5 程式的思考邏輯

我們以氣泡排序法(Bubble Sorting)來說明程式中邏輯思考的例子。

氣泡排序法是逐步地將相臨的資料互相比較，若發現前面的資料比後面的資料大時，就將資料互換。依次由左至右，會像氣泡般依次將最小的數字後往前浮起，最後所有的資料將會依照由小至大的順序排列。

在這個例子中，我們需要整理出氣泡排序法的原則性，然後依照原則性推敲程式進行的各個步驟，也需要考慮在這樣的步驟中是否會發生錯誤的狀況，讓程式執行能夠完全正確，不會有錯誤發生。

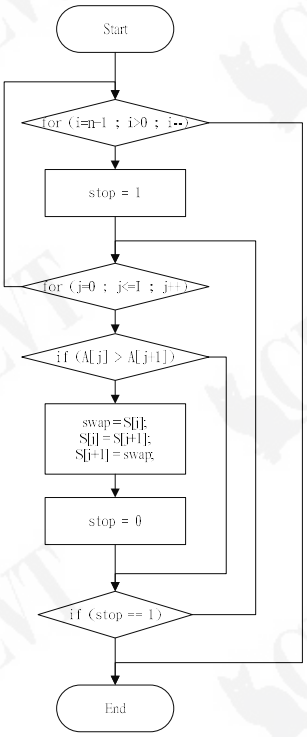
2.5.1 氣泡排序法的思考步驟



2.5.2 氣泡排序法的流程圖

撰寫程式時，我們會利用流程圖的方式來幫助我們整理思考，讓邏輯清晰而正確。

下面的例子中，我們利用流程圖來一步一步地思考程式執行的步驟，並且容易看出可能的錯誤狀況。



2.5.3 氣泡排序法的程式碼

```
int i, j, swap, stop;
int S[];

for (i=n-1 ; i>0 ; i--)
{
    stop = 1;
    for (j=0 ; j<=I ; j++)
    {
        if (A[j] > A[j+1])
        {
            swap = S[j];
            S[j] = S[j+1];
            S[j+1] = swap;
            stop = 0;
        }

        if (stop == 1) break;
    }
}
```

3 簡化運算、提升效率

3.1 數列與級數

我們經常使用的例子為加總，將若干項的數字累加計算出總和。

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

在級數中，我們必須對每一項的數字累加計算，所以我們需要計算 n 次，才能得到結果。

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$

上面的級數經由數學的整理後，能夠得到一個加總的公式，在加總公式中，我們只需要進行 3 次的計算就能夠得到加總的結果。

$$s = \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2}$$

利用此類的數學公式，我們能夠以很少的計算次數，得到我們需要的結果。

3.2 簡化的方程式

典型的例子是傅立葉轉換(Fourier Transform)，數學上發展出很多種傅立葉轉換的計算方式，如離散傅立葉轉換(Discrete Fourier Transform，簡稱DFT)以及快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform，簡稱 FFT)，這兩者需要的計算次數就差異很大，如下表示一個以硬體執行計算的例子，標示出 DFT 與 FFT 的計算次數，在執行 512 個輸入樣本數的情形下，DFT 需要 262144 次的執行次數，FFT 則只需要 2304 次。這表示使用 FFT 計算時只需要使用 DFT 時的 1/113 的時間。

傅立葉轉換級數(DFT)　　快速傅立葉轉換級數(FFT)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \longrightarrow X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

限制條件簡化方程式

Complexity:	DFT	FFT
Complex Additions	N^2	$\left(N/2\right)\log_2(N)$
Complex Multiplications	$N(N-1)$	$N\log_2(N)$

N	DFT		FFT	
	Multiplication	Additions	Multiplication	Additions
128	16,384	16,256	448	896
256	65,536	65280	1,024	2048
512	262,144	261,632	2,304	4608

運算次數

離散傅立葉(DFT)轉換與快速傅立葉(FFT)轉換比較

4 實用的數學方法

程式中為了某些特定的目的，會直接使用數學的模型來達成目的，例如我們需要計算加總，我們就會直接利用級數的加總公式，我們想要計算平均數，就會利用統計的各種計算平均值的公式，在撰寫程式的時候,我們可以利用各式各樣的數學公式,就能夠較為專注在程式的其他判斷或式處理上，讓撰寫程式變得更有效率。

4.1 常見使用於程式中的數學

以下列舉了一些較為常見使用在程式中的的數學領域，也是一般會在高中大學時學習到的數學，如果能夠對這些數學有更多了解，能夠大幅增加程式撰寫的功力。

4.1.1 多元多次方程式

4.1.2 三角函數

4.1.3 級數

4.1.4 微積分

4.1.5 線性代數

4.1.6 離散數學

4.1.7 機率

4.1.8 統計